

2 Теорема об ортогональной проекции, орто-проектор на одномерное подпространство, дефект ядра линейного отраженного оператора

↓ (Ф. Леви, об ортогонал. разложении) $\square$ Н-ил. пр-во, $H_1 \subseteq H$ — замкн. лн. п/пр-во, $H_2 = \{x \in H, (x, y) = 0, \forall y \in H_1\}$ ($H_2 = H_1^\perp$) тогда $\forall x \in H \exists ! x_1 \in H_1, x_2 \in H_2: x = x_1 + x_2$, т.е. $H = H_1 \oplus H_1^\perp$

▲ Берем $\forall x \in H$. $\star$ пр-во $M = \{x - y_1, y_1 \in H_1\} \Rightarrow M$ — замкн. и вып! То $\forall$ об эл-те с наим. $\| \cdot \| \Rightarrow \inf_{y \in H_1} \|x - y\|$ дости-

гается, т.е. $\exists x_1 \in H_1: \inf_{y \in H_1} \|x - y\| = \|x - x_1\|$

$\square$ $x - x_1 = x_2$; $\|x - y_1\| \geq \|x - x_1\|, \forall y_1 \in H_1 \Rightarrow \|x - y_1 - x_1 + x_1\| = \|x_1 - y_1 + x_2\| \geq \|x_2\|, \forall y_1 \in H_1 \Rightarrow \|z_1 + x_2\| \geq \|x_2\|, \forall z_1 \in H_1 \Rightarrow \| \alpha z_1 + x_2 \| \geq \|x_2\|, \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \| \alpha z_1 + x_2 \|^2 \geq \|x_2\|^2 \Rightarrow \| \alpha z_1 \|^2 + 2 \operatorname{Re}(\alpha (z_1, x_2)) + \|x_2\|^2 \geq \|x_2\|^2 \Rightarrow \| \alpha z_1 \|^2 \geq -2 \operatorname{Re}(\alpha (z_1, x_2))$
 Возьмем $\alpha = -\varepsilon e^{-i \arg(z_1, x_2)} \Rightarrow |\varepsilon|^2 \|z_1\|^2 \geq 2 \operatorname{Re} \varepsilon e^{-i \arg(z_1, x_2)} |(z_1, x_2)| e^{i \arg(z_1, x_2)} \Leftrightarrow |\varepsilon|^2 \|z_1\|^2 \geq 2 \varepsilon |(z_1, x_2)| \Rightarrow \varepsilon \|z_1\|^2 \geq 2 |(z_1, x_2)|$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |(z_1, x_2)| = 0, \forall z_1 \in H_1 \Rightarrow x_2 \perp H_1$ или $x_2 \in H_1^\perp = H_2$ — ортол. дополнение $\Rightarrow \forall x \in H \exists x_1 \in H_1$ и $x_2 \in H_1^\perp = H_2$ и $x = x_1 + x_2$

$\square$ $\square$ $x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2; x_1, x'_1 \in H_1, x_2, x'_2 \in H_1^\perp$
 $x - x = x_1 + x_2 - x'_1 - x'_2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x_1 - x'_1}_{\in H_1} = \underbrace{x'_2 - x_2}_{\in H_2}$ значит их ск. пр. равно 0.
 $0 = (x_1 - x'_1, x'_2 - x_2) = (x_2 - x'_2, x'_1 - x_1) \Rightarrow x_2 = x'_2 \Rightarrow x_1 = x'_1$

Сл $\square$ $\dim H_1 = 1, H_1 = \{x = \alpha e, \text{ где } \|e\| = 1, e \in H_1, \alpha \in \mathbb{C}\}$ — одномер. п/пр-во; H_1 — лн. и замкн $\Rightarrow H = H_1 \oplus H_1^\perp$, т.е. $\forall x \in H \exists x_1 \in H_1$ и $x_2 \in H_2: x = x_1 + x_2 = \alpha e + x_2$.
 ▲ Помножим $x = \alpha e + x_2$ скалярно на $e \Rightarrow (x, e) = \alpha \underbrace{(e, e)}_{=1} + \underbrace{(x_2, e)}_{=0 (x_2 \in H_2, e \in H_1)} = \alpha \Rightarrow \alpha = (x, e)$ и $x = \underbrace{(x, e)}_{\text{проекция эл-та } x \text{ на } H_1} e + x_2$

// ортол. проектор — частный случай проектора, когда пр-ва U и V ортогональны друг другу, т.е. $\forall u \in U, \forall v \in V \Rightarrow (u, v) = 0$

* мин. орг. оп-ры (функционалы) $f: H \rightarrow \mathbb{C}$

Ар-во мин. орг. функц-ов над H наз-ся сопряж. пр-вом: $H^* = \mathcal{L}(H \rightarrow \mathbb{C})$

Лемма If $f \in H^*$ и $f \neq 0$, то $\dim(\ker f)^\perp = 1$

▲ $\ker f = \{x \in H: f(x) = 0\}$ — замкн. мин. н/пр-во. If $x_n \in \ker f$ и $x_n \rightarrow y$, то $\underbrace{f(x_n)}_{=0} \rightarrow f(y)$ (в силу орг-ти, а, $\Rightarrow$, и непр-ти) $\Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y \in \ker f$

Воспользуясь орт. разложением: $H = \ker f \Rightarrow H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$. Покажем, что $\dim(\ker f)^\perp = 1$

$\exists x_1, x_2 \in (\ker f)^\perp$; x_1, x_2 — мин/нел. $\exists x = f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2$, $x \in (\ker f)^\perp$ как мин/комб. эл-тов из $(\ker f)^\perp$. С друг. сто-роны, $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f$. Т.о. x орт. к себе сам себе $\Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x_1$ и x_2 — мин/зав $\Rightarrow \dim(\ker f)^\perp$ не мб ≥ 2

Но есть ли хотя бы 1 эл-т в $(\ker f)^\perp$? If $(\ker f)^\perp = \emptyset$ то $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp = \ker f \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow (!?)$ Т.о., if функц-я f — не аннулирующая, то $(\ker f)^\perp$ содержит 1 эл-т ■